一般位相と解析学　講義報告　第 6 回 *

数学工房 †

2008 年 7 月 27 日 14:00-16:30

概要

本日は位相の強弱を最初に定義して，いくつかの位相の強弱を比較した．次に位相の族の下限位相が，与えられた族の積集合で構成できることを示した．次に，集合の部分集合族が与えられたときに，この元を開集合とする最弱な位相が存在することを証明した．また，部分集合族からこのような位相を構成する方法を示した．次に与えられた位相族の上限位相の定義を示し，この構成法を示した．

1　位相の比較と構造

ここでは，位相を開集合系で与えることとする．

定義 1.1 (位相の集合)**.** 集合 S 上の開集合系全体の集合を $\mathrm{Top}\,(S)$ と書く．

与えられた集合に対する開集合系は極めてたくさんある．両極端として，密着位相と呼ばれる $\{\emptyset,\ S\}$，離散位相と呼ばれる 2^S がある．これらはもちろん $\{\emptyset,\ S\} \in \mathrm{Top}\,(S),\ 2^S \in \mathrm{Top}\,(S)$ である．$\mathrm{Top}\,(S)$ は開集合系の包含関係により，半順序構造を持つ．

定義 1.2 (位相の強弱)**.** $\mathfrak{O}_i \in \mathrm{Top}\,(S),\ (i = 1,\ 2)$ で，$\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{O}_2$ とき，$\mathfrak{O}_1$ は $\mathfrak{O}_2$ より弱い（粗い）という．また $\mathfrak{O}_2$ は $\mathfrak{O}_1$ より強い（細かい）という．

例題 1.1. 次の $\mathbb{R}^2$ 上の *7* つの位相を考察しよう．

1° 離散位相：$2^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$

---

* Reported by H.T.

† http://www.sugakukobo.com

2° $\pi_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \ni (x,\ y) \longmapsto x \in \mathbb{R}$ と $\pi_2 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \ni (x,\ y) \longmapsto y \in \mathbb{R}$ という射影とする.

$$\pi^{-1}(U) = \{(x,\ y)\ ;\ x \in U,\ U \text{ は } \mathbb{R} \text{ の } \textit{Euclid}\text{ 開集合 },\ y \in \mathbb{R}\}$$
$$\pi^{-2}(V) = \{(x,\ y)\ ;\ y \in V,\ V \text{ は } \mathbb{R} \text{ の } \textit{Euclid}\text{ 開集合 },\ x \in \mathbb{R}\}$$

とするとき，次の集合系を考える.

$$\mathfrak{O}_{\pi_1} = \left\{\pi_1^{-1}(U)\ ;\ U \text{ は } \mathbb{R} \text{ の } \textit{Euclid}\text{ 開集合}\right\}$$
$$\mathfrak{O}_{\pi_2} = \left\{\pi_2^{-1}(V)\ ;\ V \text{ は } \mathbb{R} \text{ の } \textit{Euclid}\text{ 開集合}\right\}$$

3° $\mathbb{R}^2$ の *Euclid* 位相：$\mathcal{E}$

4° $\mathfrak{O}_3 : \left\{\mathbb{R}^2 \text{ から高々有限個の点を除いた部分集合}\right\} \cup \{\emptyset\}$

5° $\mathfrak{O}_\rho : \mathbb{R}^2$ 上の距離を次のように入れる.

$$\rho(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \begin{cases} \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2 & \boldsymbol{x} \text{ と } \boldsymbol{y} \text{ が線型従属} \\ \|\boldsymbol{x}\|_2 + \|\boldsymbol{y}\|_2 & \boldsymbol{y} \text{ と } \boldsymbol{y} \text{ が線型独立} \end{cases}$$

$\mathfrak{O}_\rho$ は同一線上にあれば，通常の距離だが，同一線上になければ，原点を経由した距離となる.

6° 密着位相：$\left\{\emptyset,\ \mathbb{R}^2\right\}$

演習 1.1. $\mathfrak{O}_{\pi_1}$ および $\mathfrak{O}_3$ が位相であることを示せ．開集合系の *3* 公理を示せばよい.

以上の位相の包含関係を直感的に考えてみる．結果は次の通りだが納得いくだろうか.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 2^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} & & \\
 & & \cup & & \\
 & & \mathfrak{O}_\rho & & \\
 & & \cup & & \\
\mathfrak{O}_{\pi_1} & \subset & \mathcal{E}\ (\mathrm{Euclid}) & \supset & \mathfrak{O}_{\pi_2} \\
 & & \cup & & \\
 & & \mathfrak{O}_3 & & \\
 & & \cup & & \\
 & & \left\{\emptyset,\ \mathbb{R}^2\right\} & &
\end{array}$$

図 1　位相の強弱関係

命題 1.1. 距離空間は *Hausdorff* の性質を持つ.

ただし Hausdorff の性質とは次の通りである.

定義 1.3. X を位相空間とする. 任意の $x,\ y \in X$ に対して, ある $V \in \mathfrak{V}_x$ と $U \in \mathfrak{V}_y$ が存在して $V \cap U = \emptyset$ となるとき X は Hausdorff の性質を持つと言う.

演習 1.2. 命題 *1.1* を既知として, $\mathfrak{O}_3$ が距離空間でないことを示せ.

2 下限位相

定義 2.1 (下限位相)**.** $\mathfrak{O}_\lambda \in \mathrm{Top}\,(S),\ \lambda \in \Lambda$ とするとき

$$\inf_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{O}_\lambda := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{O}_\lambda$$

を下限位相という.

右辺が下限位相であることは次の 2 つの命題で示される.

命題 2.1 (位相であること)**.**

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{O}_\lambda \in \mathrm{Top}\,(S)$$

を示せ.

演習 2.1. 命題 *2.1* を示せ.

命題 2.2 (下限であること)**.** $T \in \mathrm{Top}\,(S)$ が $T \subset \mathfrak{O}_\lambda,\ (\forall \lambda \in \Lambda) \Longrightarrow T \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{O}_\lambda$

この命題は, 証明することなく成り立つことはわかるだろう. 以上のことから $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{O}_\lambda$ は $(\mathrm{Top}\,(S),\ \subset)$ における族 $\{\mathfrak{O}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の下限である.

3 位相の生成

命題 3.1. 空でない集合 $\mathcal{M} \subset 2^S$ に対して, $\mathcal{M}$ の元を開集合とする最弱な位相 $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ が存在する.

演習 3.1. 命題 *3.1* を示せ.

存在はわかったが，次に $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ を構成できることを示す．後に証明するが，次のような形で構成することが可能である．

集合 $S \neq \emptyset$ の任意の部分集合族を $\mathcal{M}$ とする．

$$\mathcal{M}_0 := \left\{ \bigcap_{i \in I} A_i \ ; \ A_i \in \mathcal{M},\ I \text{ は有限集合} \right\}$$

このとき，$\mathcal{T}(\mathcal{M})$ の元は $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ なる型で表示される．ただし，$B_\lambda \in \mathcal{M}_0$ である．

例題 3.1. 例えば，$S = \mathbb{R}$ で

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= \{(-\infty,\ a)\ ;\ a \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{M}_2 &= \{(b,\ -\infty)\ ;\ b \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{M} &= \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \end{aligned}$$

とする．

$$(-\infty,\ a) \cap (b,\ \infty)$$

は，$a > b$ ならば $(b,\ a)$ になることに注意すると $\mathcal{M}_0 \supset I$（*1* 次元開区間全体）となる．

命題 3.2. $\mathcal{M}_1$，$\mathcal{M}_2$ を S の部分集合族とする．

$$\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \Longrightarrow \mathcal{T}(\mathcal{M}_1) \subset \mathcal{T}(\mathcal{M}_2)$$

命題 3.3.

$$\mathcal{T}(\mathcal{M}) = \mathcal{T}(\mathcal{M}_0)$$

定理 3.4 (位相の生成)**.** $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ の元は $\mathcal{M}_0$ の元の和で表される．

$$\mathscr{S} = \left\{ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \ ;\ B_\lambda \in \mathcal{M}_0,\ \lambda \in \Lambda \right\} \cup \{S\}$$

とすると $\mathscr{S}$ は開集合系である．

演習 3.2. 定理 *3.4* を示せ．

4　上限位相

命題 4.1. $\{\mathfrak{O}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$，$\mathfrak{O}_\lambda \in \mathrm{Top}\,(S)$，$(\lambda \in \Lambda)$ が与えられている．このとき次の性質を持つ $\mathcal{S} \in \mathrm{Top}\,(S)$ が存在する．

1° $\mathcal{S} \supset \mathfrak{O}_\lambda,\ \forall\lambda \in \Lambda$

2° $\mathcal{T} \in \mathrm{Top}\,(S)$ かつ $\mathcal{T} \supset \mathfrak{O}_\lambda,\ \forall\lambda \in \Lambda$ ならば $\mathcal{T} \supset \mathcal{S}$

上記の性質から $\mathcal{S}$ を $\{\mathfrak{O}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の上限位相と呼ぶ.

演習 4.1. 命題 *4.1* を示せ.

$$\mathcal{M} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{O}_\lambda,\ \mathcal{S} = \mathcal{T}(\mathcal{M})$$

とすればよい．これが位相 $\mathrm{Top}\,(S)$ の元でかつ，上限になっていることを示せ.

命題 4.2. $\mathfrak{O}_i \in \mathrm{Top}\,(S),\ (i = 1,\ 2)$ に対して，これから定まる閉集合系を $\mathfrak{A}_i,\ (i = 1,\ 2)$, 近傍系を $\mathfrak{V}_i(x),\ (i = 1,\ 2)$ とするとき，次は同値である.

1° $\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{O}_2$

2° $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2$

3° $\mathfrak{V}_1(x) \subset \mathfrak{V}_2(x)$

演習 4.2. 命題 *4.2* を示せ.

演習 4.3. 命題 *4.2* をネットを用いて表現すると次のようになる．$(S,\ \mathfrak{O}_2)$ においてネット $\varphi : D \longrightarrow S$ は収束する任意のネットならば，$(S,\ \mathfrak{O}_1)$ で $\varphi : D \longrightarrow S$ は収束する. 細かい位相で収束すれば，粗い位相でも収束する．このことを示せ.